I ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1—2
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
1961

О СХОДИМОСТИ ФАКТОРИАЛЬНЫХ РЯДОВ

М. ГАНДЛЕР, Э. ГОЛОСОВА и А. НАФТАЛЕВИЧ

В статье изучается сходимость факториальных рядов вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k z_1 z_2 \cdots z_k}{z(z+z_1)(z+z_2)\cdots(z+z_k)} \tag{A}$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k (z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_k)}{z_1 z_2 \cdots z_k} \tag{B}$$

(ряд вида (B) называется также рядом Ньютона).

Изучением этих рядов для случая $z_k = k\,(k=1, 2, \cdots)$ занимались многие авторы, в частности, Ландау и Норлунд (см. [3] гл. X).

Г. В. Бадалян изучал ряды вида (A) и (B) в более общем случае, а именно, при условиях

$$0 < z_1 < z_2 < \cdots < z_k < \cdots \to \infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z_k} = \infty.$$

Для последнего случая доказано, что области сходимости и абсолютной сходимости являются полуплоскостями. В работе [1] вычислены также абсциссы сходимости рядов (A) и (B).

В нашей работе изучаются ряды (A) и (B) при произвольных значениях $z_1 z_2, \cdots, z_k, \cdots$.

Приводится аналог известной теоремы Абеля о сходимости степенных рядов.

Ключом к получению этого результата явилось следующее рассуждение.

На факториальный ряд вида (A) можно смотреть как на формальный предел последовательности рядов вида

$$I_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{a'_k}{z(z+z_1)\cdots(z+z_k)} +$$

$$+ \frac{1}{z(z+z_1)\cdots(z+z_N)} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a'_n}{(z+z_{N+1})^{n-N}}$$

при $N \to \infty$. Известно, что если ряд I_N сходится в некоторой точке $z = z_0$, то он будет сходиться во внешности круга $|z + z_{N+1}| > |z_0 + z_{N+1}|$, которую обозначим $Q_{N+1}(z_0)$.

Это замечание приводит к следующему предположению:

Пусть

$$Q(z_0) = \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} Q_n(z_0)$$

(иными словами, точка $z \neq -z_k$ принадлежит множеству $Q(z_0)$, если $z \in Q_n(z_0)$ при $n > N$, $N = N(z)$).

Если ряд (А) сходится в некоторой точке $z = z_0$, то он будет сходиться во внутренних точках (если такие имеются) множества $Q(z_0)$.

В § 2 показано, что это предложение верно.

В работе вычисляются также абсциссы сходимости факториальных рядов (А) и (В) для случая, когда

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{Re} z_n = \infty,$$

$$\lim_{n \to \infty} \arg z_n = 0.$$

§ 1. Области $\mathring{Q}(z_0)$ и $\mathring{R}(z_0)$ и их свойства

1. Рассмотрим последовательность точек $z_1, z_2, \cdots$. Пусть $z_0 \neq -z_n (n = 1, 2, \cdots)$ — некоторая точка конечной плоскости. Обозначим через K_n замкнутый круг с центром в точке $-z_n$ и радиусом $|z_0 + z_n| (n = 1, 2, \cdots)$.

Определение 1. *Множество* $Q(z_0)\big(R(z_0)\big)$ — *это совокупность таких точек* z, *каждая из которых обладает следующим свойством: существует такое число* $N = N(z)$, *что точка* z *лежит вне (внутри) кругов* K_n *при* $n > N$.

Определение 2. *Область* $\mathring{Q}(z_0)\big(\mathring{R}(z_0)\big)$ — *это совокупность внутренних точек множества* $Q(z_0)\big(R(z_0)\big)$.

Приведем несколько примеров областей $\mathring{Q}(z_0)$ и $\mathring{R}(z_0)$.

1. Пусть

$$\lim_{n \to \infty} z_n = \infty,$$

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \arg (z_n - \xi) = \alpha, \qquad \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

$$\underline{\lim_{n \to \infty}} \arg (z_n - \xi) = -\alpha,$$

Областью $\mathring{Q}(z_0)$ будет внутренность угла

$$|\arg(z - z_0)| < \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

а областью $\mathring{R}(z_0)$ — внутренность угла

$$|\arg(z_0 - z)| < \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Заметим, что эти углы вертикальные и их стороны перпендикулярны сторонам угла $|\arg(z-\xi)|<\alpha$.

2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \arg z_n=0$, то областью $\mathring{Q}(z_0)$ будет полуплоскость $\operatorname{Re} z>\operatorname{Re} z_0$, а областью $\mathring{R}(z_0)$ — полуплоскость $\operatorname{Re} z<\operatorname{Re} z_0$.

3. Пусть последовательность точек $\{z_0\}$ имеет единственную предельную точку α, $\alpha\neq\infty$. Тогда область $\mathring{Q}(z_0)$ определяется неравенством $|z+\alpha|>|z_0+\alpha|$ (внешность круга с центром в точке $-\alpha$), а область $\mathring{R}(z_0)$ — неравенством $|z+\alpha|<|z_0+\alpha|$ (внутренность того же круга).

4. Пусть последовательность точек $\{z_n\}$ ограничена, и P — производное множество этой последовательности. Обозначим через $Q(z_0, \xi)$ $\left(R(z_0, \xi)\right)$ внешность (внутренность) круга $|z+\xi|\leqslant|z_0+\xi|$.

Тогда область

$$\mathring{Q}(z_0)=\bigcap_{\xi\in P} Q(z_0, \xi) \tag{1.1}$$

и

$$\mathring{R}(z_0)=\bigcap_{\xi\in P} R(z_0, \xi). \tag{1.2}$$

2. Докажем несколько лемм, которыми часто будем пользоваться.

Лемма 1. *Если точка принадлежит области $\mathring{Q}(z_0)$, то существуют такие зависящие от z положительные числа $\delta=\delta(z)$ и $N=N(z)$, что точка z вместе с окрестностью радиуса δ лежит вне кругов K_n, как только $n>N$.*

Пусть z — некоторая точка области $\mathring{Q}(z_0)$. Тогда при $n>N$ будет

$$|z+z_n|-|z_0+z_n|>0 \tag{1.3}$$

и

$$\varliminf_{n\to\infty}\{|z+z_n|-|z_0+z_n|\}\geqslant 0. \tag{1.4}$$

Докажем, что в соотношении (1.4) знак равенства невозможен.

Рассуждая от противного, допустим, что

$$\varliminf_{k\to\infty}\{|z+z_n|-|z_0+z_n|\}=0. \tag{1.5}$$

Тогда существует такая подпоследовательность $\{n_k\}$ натуральных чисел, что

$$\lim_{k\to\infty}\{|z+z_{n_k}|-|z_0+z_{n_k}|\}=0. \tag{1.6}$$

Рассмотрим два случая:

а). Последовательность $\{z_{n_k}\}$ имеет конечную предельную точку α.

Можем считать, что

$$\lim_{k\to\infty} z_{n_k}=\alpha,$$

$$\lim_{k\to\infty}|z+z_{n_k}|=|z+\alpha|,\quad \lim_{k\to\infty}|z_0+z_{n_k}|=|z_0+\alpha|.$$

Учитывая эти соотношения из (1.6) получаем

$$|z+\alpha|=|z_0+\alpha|,$$

откуда по примеру 3 следует, что точка $z\,\bar{\in}\,\mathring{Q}(z_0)$.

б) Последовательность $\{z_{n_k}\}$ имеет единственную предельную точку в бесконечности:

$$\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = \infty.$$

Допустим, что

$$z = ci, \quad z_0 = -ci, \quad c > 0, \tag{1.7}$$

и докажем, что

$$\lim_{k\to\infty} \arg z_{n_k} = 0. \tag{1.8}$$

Заметим, что допущение (1.7) не ограничивает общности, так как выполнение условий (1.7) можно достичь при фиксированных z_0 и z поворотом осей и переносом начала координат.

Доказательство последнего утверждения будем вести от противного. Предположим, что для некоторой подпоследовательности $z_{n_{k_j}} (j = 1, 2 \cdots)$ последовательности $\{z_{n_k}\}$

$$\lim_{j\to\infty} \arg z_{n_{k_j}} = \sigma \neq 0.$$

Обозначим $z_{n_{k_j}} = \xi_j + i\eta_j$ и вычислим

$$\lim_{j\to\infty} \{ |z + z_{n_{k_j}}| - |z_0 + z_{n_{k_j}}| \} = \frac{2c \operatorname{tg} \sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}} \neq 0.$$

Но это противоречит равенству (1.6). Таким образом, имеет место равенство (1.8), и по примеру 2 область $\overset{\circ}{Q}(z_0)$ содержится в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$.

Из равенства (1.7) следует, что $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z_0$, так что $z \overline{\in} \overset{\circ}{Q}(z_0)$.

Итак, мы доказали, что в неравенстве (1.4) знак равенства невозможен. Следовательно,

$$\varliminf_{n\to\infty} \{ |z + z_n| - |z_0 + z_n| \} = 2\delta > 0$$

и

$$|z + z_n| - |z_0 + z_n| > \delta \quad \text{при} \quad n > N, \tag{1.9}$$

что и требовалось доказать.

Замечание. *Если точка $z \in \overset{\circ}{R}(z_0)$, то существуют такие зависящие от z положительные числа $\delta = \delta(z)$ и $N = N(z)$, что точка z лежит вместе с окрестностью радиуса δ внутри кругов K_n, как только $n > N$.*

Это можно доказать таким же образом, как лемму 1, или еще проще, пользуясь выпуклостью множества $R(z_0)$.

Лемма 2. *Если точка $z \in \overset{\circ}{R}(z_0)$, то точка $z_0 \in \overset{\circ}{Q}(z)$.*

Доказательство. Пусть точка $z \in \overset{\circ}{R}(z_0)$. Из предыдущего замечания следует, что

$$\varliminf_{n\to\infty} (|z_0 + z_n| - |z + z_n|) > 0.$$

Последнее неравенство означает, что $z_0 \in \overset{\circ}{Q}(z)$.

Лемма 3. *Пусть F — ограниченное замкнутое множество точек, принадлежащее области $\overset{\circ}{Q}(z_0): F \in \overset{\circ}{Q}(z_0)$.*

Существуют такие зависящие от F положительные числа $\delta = \delta(F)$ и $N = N(F)$, что каждая точка множества F лежит вместе с окрестностью радиуса δ вне кругов K_n, как только $n > N$.

Это предложение легко доказывается с помощью леммы 1, используя теорему Бореля о конечном покрытии.

Лемма 4. *Пусть* $\{b_k\}$ — *последовательность комплексных чисел, и* $\{c_k(z)\}$ — *последовательность функций, определенных в области* G.

Если ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

сходится и ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k(z) - c_{k+1}(z)|$$

сходится (равномерно сходится) в области G, *то в этой области сходится (равномерно сходится) и ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k c_k(z).$$

(Доказательство см. в [2] стр. 160).

§ 2. Аналог теоремы Абеля для факториальных рядов

1. Рассмотрениям этого параграфа предпошлем следующее

замечание. Факториальный ряд (А), очевидно, расходится в точках $z=0$, $z=-z_n$, $n=1, 2\cdots$. Поэтому при изучении сходимости (равномерной сходимотси) ряда (А) исключим из комплексной плоскости точки $z=0$ и $z=-z_n$, $n=1, 2\cdots$ (вместе с достаточно малыми окрестностями этих точек). Таким образом, утверждение: ряд (А) сходится (равномерно сходится) в области G следует понимать в том смысле, что ряд (А) сходится (равномерно сходится) в области G, из которой исключены точки $z=0$ и $z=-z_n$ (вместе с достаточно малыми окрестностями этих точек).

Теорема 1. *Если ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{a_k z_1 z_2 \cdots z_k}{(z+z_1)(z+z_2)\cdots(z+z_k)} \right|$$

сходится (расходится) в точке $z=z_0$, *то этот ряд сходится (расходится) на множестве* $Q(z_0)\left(R(z_0)\right)$.

Доказательство. Если $z \in Q(z_0)$, то

$$|z_0+z_n| \leqslant |z+z_n| \quad \text{при} \quad n > N. \tag{2.1}$$

Поэтому

$$\left| \frac{a'_n}{(z+z_{N+1})\cdots(z+z_n)} \right| \leqslant \left| \frac{a'_n}{(z_0+z_{N+1})\cdots(z_0+z_n)} \right|.$$

Если $z \in \mathring{R}(z_0)$, то имеет место обратное неравенство. Откуда и следует теорема.

Теорема 2. *Если ряд* (А) *сходится в точке* $z=z_0$, *то он сходится в области* $\mathring{Q}(z_0)$.

Если ряд (А) *расходится в точке* $z=z_0$, *то он расходится в области* $\mathring{R}(z_0)$.

Доказательство. Пусть $z \in \overset{\circ}{Q}(z_0)$ и $N = N(z)$ — такое число, что точка z вместе с окрестностью радиуса $\delta = \delta(z)$ лежит вне кругов K_n при $n > N$ (см. лемму 1).

Ряд (A) перепишем $\Big($отбросив конечное число членов и разделив на $(z_0 + z_1) \cdots (z_0 + z_N)\Big)$ в виде

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n'}{(z_0+z_{N+1}) \cdots (z_0+z_n)} \cdot \frac{(z_0+z_{N+1}) \cdots (z+z_n)}{(z+z_{N+1}) \cdots (z+z_n)}. \tag{2.2}$$

Введем обозначения

$$b_n = \frac{a_n'}{\prod\limits_{m=N+1}^{n} (z_0+z_m)}, \tag{2.3}$$

$$c_n = \frac{\prod\limits_{m=N+1}^{n} (z_0+z_m)}{\prod\limits_{m=N+1}^{n} (z+z_m)} \tag{2.4}$$

и рассмотрим ряд

$$\sum_{s=N+1}^{\infty} (|c_s| - |c_{s+1}|). \tag{2.5}$$

Так как

$$|z+z_m| > |z_0+z_m| \quad \text{для} \quad m > N,$$

то последовательность $\{|c_p|\}$, $p > N$, — убывающая и ряд (2.5) сходится.

Рассмотрим теперь отношение

$$\frac{|c_s| - |c_{s+1}|}{|c_s - c_{s+1}|} = \frac{|z+z_{s+1}| - |z_0+z_{s+1}|}{|z-z_0|}. \tag{2.6}$$

Так как точка z лежит вместе с окрестностью радиуса δ вне кругов K_n при $n > N$, то

$$\delta' < \frac{|z+z_{s+1}| - |z_0+z_{s+1}|}{|z-z_0|} < 1, \tag{2.7}$$

где $\delta' = \frac{\delta}{|z-z_0|}$ и $s = N+1,\ N+2, \cdots$.

Из сходимости ряда (2.5) и оценки (2.7) следует сходимость ряда $\sum\limits_{S=N+1}^{\infty} |c_s - c_{s+1}|$. По условию первой части теоремы ряд $\sum\limits_{s=N+1}^{\infty} b_s$ сходится.

Применив лемму 4, получаем, что сходится ряд $\sum\limits_{s=N+1}^{\infty} b_s c_s$, т. е. сходится ряд (A).

Осталось доказать, что из расходимости ряда в точке $z = z_0$ следует его расходимость в области $\overset{\circ}{R}(z_0)$

Предположив, что ряд (A) сходится в некоторой точке $z \in \overset{\circ}{R}(z_0)$, получаем, что ряд (A) сходится в области $\overset{\circ}{Q}(z)$ и, следовательно, в точке $z_0 \in \overset{\circ}{Q}(z)$ (см. лемму 2), что противоречит предположению.

Следствие 1. Пусть точки z_n удовлетворяют условиям, указанным в примере 1 § 1.

Если ряд (А) *сходится в точке* $z=z_0$, *то он сходится внутри угла*

$$|\arg(z-z_0)|<\frac{\pi}{2}-\alpha.$$

Если ряд (А) *расходится в точке* $z=z_0$, *то он расходится внутри угла*

$$|\arg(z_0-z)|<\frac{\pi}{2}-\alpha.$$

Следствие. 2 Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\arg z_n=0$.

Если ряд (А) *сходится (расходится) в точке* $z=z_0$, *то он будет сходиться (расходиться) в полуплоскости* $\operatorname{Re} z>\operatorname{Re} z_0$ $(\operatorname{Re} z<\operatorname{Re} z_0)$ (см. § 1 пример 2).

Следствие 3. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\alpha$, $\alpha\neq\infty$.

Если ряд (А) *сходится (расходится) в точке* $\hat{z}=z_0$, *то он сходится (расходится) вне (внутри) круга* $|z+\alpha|\leqslant|z_0+\alpha|$ (см. пример 3).

Следствие 4. *Пусть последовательность точек* $\{z_n\}$ *ограничена, и* P — *производное множество этой последовательности.*

Если ряд (А) *сходится (расходится) в точке* $z=z_0$, *то ряд будет сходиться (расходиться) в области* $\mathring{Q}(z_0)\left(\mathring{R}(z_0)\right)$, *определенной равенством* (1.1) $\left((1.2)\right)$ (см. пример 4).

2. Приведем несколько предложений о равномерной сходимости факториального ряда (А).

Лемма 5. *Если ряд* (*А*) *сходится в точке* $z=z_0$, *то ряд равномерно сходится внутри области* $\mathring{Q}(z_0)$, *т. е. равномерно сходится на любом замкнутом ограниченном множестве* F, *лежащем в области* $\mathring{Q}(z_0)$.

Доказательство. Пусть $N=N(F)$ — такое число, что любая точка z, $z\in F$, лежит вместе с окрестностью радиуса δ вне кругов K_n при $n>N$. Вновь рассматриваем ряд (2.5).

Последовательность аналитических функций $\{c_p(z)\}$ $\left(\text{см. (2.4)}\right)$ ограничена на множестве $F:|c_p(z)|<1$. Поэтому эта последовательность, а вместе с ней и последовательность $\{|c_p(z)|\}$ компактны на множестве F. С другой стороны, последовательность $\{|c_p(z)|\}$ сходится на множестве F, так как она убывает на этом множестве. Приняв во внимание компактность последовательности $\{|c_p(z)|\}$, $z\in F$, заключаем, что эта последовательность равномерно сходится на множестве F. Таким образом, ряд (2.5) равномерно сходится на множестве F.

Аналогично, как в доказательстве теоремы 2, получим, что

$$\delta''<\frac{|z+z_{s+1}|-|z_0+z_{s+1}|}{|z-z_0|}<1, \tag{2.8}$$

где $z\in F$, $s>N+1$, $\delta''=\frac{\delta}{\rho}>0$, $\rho=\min\limits_{z\in F}|z-z_0|$.

Из равномерной сходимости ряда (2.5) и оценки (2.8) следует равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{s=N+1}^{\infty}|c_s-c_{s+1}|$ $\left(\text{см. (2.6)}\right)$.

Чтобы завершить доказательство, достаточно применить лемму 4.

3. Пусть F — ограниченное замкнутое множество точек области $\mathring{Q}(z_0)$. Рассмотрим совокупность прямых $L(z_0, z)$, соединяющих каждую точку $z\in F$ с точкой z_0. Через $l(z)$ обозначим тот луч прямой $L(z_0, z)$, который соединяет точку $z\in F$ с бесконечно удаленной точкой и не проходит через точку z_0 $\left(\text{через точку } z_0 \text{ проходит продолжение луча } l(z)\right)$. Совокупность точек всевозможных лучей $l(z)$, $z\in F$, образует замкнутое (в конечной плоскости) множество, которое обозначим через $[F]$.

Нетрудно проверить, что множество $[F] \subset \mathring{Q}(z_0)$.

Теорема 3. *Если ряд* (A) *сходится в точке* $z=z_0$, *то этот ряд равномерно сходится на множестве* $[F]$.

Доказательство. Пусть $N=N(F)$ — такое число, что каждая точка $z\in F$ лежит вместе с окрестностью радиуса $\delta=\delta(F)$ вне кругов K_n при $n>N$.

Возьмем произвольное достаточно малое число $\varepsilon>0$ и конечное число $p_0>N$, чтобы

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{p_0-N}<\varepsilon, \tag{2.9}$$

и проведем круг $K\colon |z-z_0|<R_1$, такой, чтобы для каждой точки z, лежащей вне этого круга, выполнялись неравенства

$$|z+z_j|>2|z_0+z_j|,\quad j=N+1,\quad N+2,\cdots p_0. \tag{2.10}$$

Из (2.9) и (2.10) имеем

$$|c_{p_0}(z)|<\left(\frac{1}{2}\right)^{p_0-N}<\varepsilon$$

при $z\overline{\in}K$.

Окружность $|z-z_0|=R_1$ делит множество $[F]$ на две части: одна из них, содержащаяся в круге K, представляет замкнутое ограниченное множество, которое обозначим через G_ε, другая — неограниченное множество, которое обозначим H_ε.

Из (2.10) следует, что при $z\in H_\varepsilon$ и $p>p_0$

$$|c_p(z)|\leqslant|c_{p_0}(z)|<\varepsilon$$

и

$$|c_p(z)|-|c_{p+\epsilon}(z)|<|c_p(z)|<\varepsilon. \tag{2.11}$$

Далее, последовательность функций $\{|c_p(z)|\}$ равномерно сходится на множестве G_ε (см. доказательство леммы 5). Поэтому

$$|c_p(z)|-|c_{p+\epsilon}(z)|<\varepsilon \tag{2.12}$$

при $p>N_1$ и $z\in G_\varepsilon$.

Пусть $N_2=\max(p_0, N_1)$. Тогда из неравенств (2.11) и (2.12) получаем, что

$$|c_p(z)|-|c_{p+\epsilon}(z)|<\varepsilon$$

при $p>N_2$ и $z\in[F]$. Следовательно, последовательность $\{|c_p(z)|\}$ равномерно сходится на множестве $[F]$.

Для простоты дальнейшего изложения примем, что наименьший угол Az_0B, содержащий множество F, определяется неравенством

$$\alpha \leqslant \arg(z - z_0) \leqslant \beta, \quad \beta - \alpha < \frac{\pi}{4},$$

и обозначим через z' (z'') общую точку стороны угла z_0A (z_0B) со множеством F (если таких точек имеется более чем одна, то в качестве точки z' (z'') выбираем из них ближайшую к точке z_0).

Так как точка z' (z'') принадлежит множеству F, то она лежит с окрестностью радиуса δ вне кругов K_n при $n > N$. Проведем окружности O' (O'') с центром в точке z' (z'') и радиусом δ и рассмотрим множество $[F + O' + O'']$. Пусть

$$\measuredangle Az_0A' = \varphi',$$

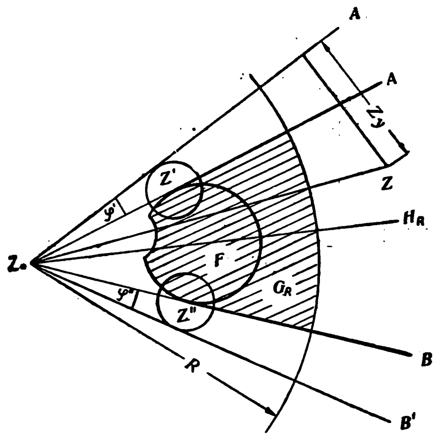
$$\measuredangle Bz_0B' = \varphi'',$$

z — любая точка множества $[F]$ и h'_z (h''_z) расстояние точки z до прямой z_0A' (z_0B'). Обозначим

$$h_z = \min(h'_z, h''_z),$$

$$\varphi = \min(\varphi', \varphi'')$$

и построим круг $K: |z - z_0| < R$. Пусть радиус R круга K настолько большой, что множество F целиком содержится в этом круге и каждая точка z,



лежащая вне этого круга и принадлежащая $[F]$, лежит вместе с окрестностью радиуса h_z вне кругов K_n при $n > N$. Окружность $|z - z_0| = R$ делит множество $[F]$ на два множества: одно из них G_R — замкнутое ограниченное, другое H_R — неограниченное.

Если $z \in H_R$ и $s > N$, то

$$\frac{|c_s(z) - c_{s+1}(z)|}{|c_s(z)| - |c_{s+1}(z)|} = \frac{|z - z_0|}{|z + z_{s+1}| - |z_0 + z_{s+1}|} > \frac{|z - z_0|}{h_z} >$$

$$> \frac{|z - z_0|}{|z - z_0| \sin\varphi} = \frac{1}{\sin\varphi} > 0. \tag{2.13}$$

Из равномерной сходимости ряда $\sum_{s=N+1}^{\infty} \left(|c_s(z)| - |c_{s+1}(z)|\right)$ и из оценки (2.13) следует равномерная сходимость ряда $\sum_{s=N+1}^{\infty} |c_s(z) - c_{s+1}(z)|$ на H_R. Применив лемму 4, заключаем, что ряд (A) равномерно сходится на множестве H_R. Из леммы 5 следует, что этот ряд равномерно сходится и на множестве G_R. Таким образом, ряд (A) равномерно сходится на множестве $[F]$.

Если множество F нельзя заключить в угол с раствором, меньшим $\frac{\pi}{4}$, то множество F разбиваем на части $F_1, F_2, \cdots, F_e$ лучами, исходящими из точки z_0 так, чтобы каждое множество $F_k (k=1, 2, \cdots, e)$ содержалось в угле с раствором меньшим $\frac{\pi}{4}$. Ряд (А) равномерно сходится на множествах $[F_k] (k=1, 2, \cdots, e)$, следовательно, и на множестве $[F] = \bigcup\limits_{k=1}^{e} [F_k]$.

4. Доказанная в предыдущем пункте теорема о равномерной сходимости ряда (А) позволяет получить один результат об единственности этого ряда (А).

Пусть F — замкнутое множество, принадлежащее области $\overset{\circ}{Q}(z_0)$, и $[F]$ — множество, определенное в предыдущем пункте. Обозначим через E, $E \in [F]$, множество, имеющее предельную точку в бесконечности.

Теорема 4. *Если ряды*

$$\frac{a_0}{z} + \frac{a_1 z_1}{z(z+z_1)} + \cdots + \frac{a_k z_1 z_2 \cdots z_k}{z(z+z_1)(z+z^2)\cdots(z+z_k)} + \cdots$$

и

$$\frac{b_0}{z} + \frac{b_1 z_1}{z(z+z_1)} + \cdots + \frac{b_k z_1 z_2 \cdots z_k}{z(z+z_1)(z+z_2)\cdots(z+z_k)} + \cdots$$

сходятся в точке $z=z_0$ и суммы этих рядов совпадают на множестве E, то $a_k = b_k$, $k=1, 2, \cdots$.

Доказательство. Пусть $\{\Psi_k\}$ — последовательность точек множества E и $\lim\limits_{k\to\infty} \Psi_k = \infty$.

По условию теоремы равенство

$$\frac{a_0-b_0}{\Psi_k} + \frac{(a_1-b_1)z_1}{\Psi_k(\Psi_k+z_1)} + \cdots + \\ + \frac{(a_k-b_k)z_1 z_2\cdots z_k}{\Psi_k(\Psi_k+z_1)(\Psi_k+z_2)\cdots(\Psi_k+z_k)} + \cdots = 0 \tag{2.14}$$

справедливо при любом натуральном k. Умножим обе части этого равенства на Ψ_k и заметим, что получаемый ряд сходится равномерно по k. Переходя в равенстве (2.14) почленно к пределу при $k \to \infty$, получаем $a_0 = b_0$. Умножая обе части равенства последовательно на

$$\frac{\Psi_k(\Psi_k+z_1)}{z_1}, \quad \frac{\Psi_k(\Psi_k+z_1)(\Psi_k+z_2)}{z_1 z_2}, \cdots$$

и переходя почленно к пределу при $k\to\infty$, получаем $a_k = b_k$, $k=1, 2, \cdots$.

5. Сходимость факториального ряда вида (В) изучается вполне аналогично как и сходимость ряда (А).

Для рядов вида (В) верны леммы 1, 2, 3, 5 и теоремы 1, 2, если в указанных леммах и теоремах под $Q(z_0)$ и $R(z_0)$ понимать следующие множества:

$$Q(z_0) = \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} Q_n(z_0), \quad R(z_0) = \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} R_n(z_0),$$

где

$$Q_n(z_0): |z - z_n| \leqslant |z_0 - z_n|,$$

$$R_n(z_0): |z - z_n| \geqslant |z_0 - z_n|,$$

§ 3. Вычисление абсцисс сходимости

1. В этом параграфе рассмотрим факториальные ряды (А) и (В), ограничивая расположение точек z_k условиями

$$\lim z_k = \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z_k} = \infty, \quad \lim_{k\to\infty} \arg z_k = 0. \tag{3.1}$$

Из результатов предыдущего параграфа следует, что при указанных условиях существует такое число $\lambda(\mu)$, что ряд (А) сходится (абсолютно сходится) в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \lambda$ ($\operatorname{Re} z > \mu$) и расходится (не сходится абсолютно) в полуплоскости $\operatorname{Re} z < \lambda$ ($\operatorname{Re} z < \mu$). Число λ называется *абсциссой сходимости* ряда (А), а число μ — *абсциссой абсолютной сходимости*. Нетрудно проверить, что $\mu \geqslant \lambda$.

2. Пусть $z_k = x_k + iy_k$ и x — действительное число. При $z = x$ ряд (А) можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{x} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{x}{z_1}\right)\left(1+\frac{x}{z_2}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{z_k}\right)}. \tag{3.2}$$

Обозначим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|z_k|} = S_n, \quad S_n \to \infty, \quad n \to \infty, \tag{3.3}$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{x}{z_1}\right)\left(1+\frac{x}{z_2}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{z_k}\right)} = b_k(x) \tag{3.4}$$

и покажем, что

$$-(1+\varepsilon_k)\, x S_k < \ln|b_k(x)| < -(1-\varepsilon_k)\, x S_k, \tag{3.5}$$

где $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$.

Заметим, что

$$\left|1+\frac{x}{z_k}\right| = \left(1+\frac{m_k}{|z_k|^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $m_k = x^2 + 2xx_k$, и

$$\lim_{k\to\infty} \frac{m_k}{|z_k|} = 2x, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{m_k}{|z_k|^2} = 0. \tag{3.6}$$

Далее,

$$\ln|b_k(x)| = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \ln\left(1+\frac{m_i}{|z_i|^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{|z_i|^2}(1+\varepsilon_i), \qquad \lim_{i\to\infty} \varepsilon_i = 0.$$

Отсюда из (3.3) и (3.6) следуют неравенства (3.5).

3. В случае $z_k = k$ абсцисса сходимости λ и абсцисса абсолютной сходимости μ связаны неравенствами $0 \leqslant \mu - \lambda \leqslant 1$ [3]. В рассматриваемом нами случае имеет место:

Теорема 5. *Если* (см. (3.3))

$$c = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\ln n} \quad \text{и} \quad c > 0, \tag{3.7}$$

то абсцисса сходимости λ *и абсцисса абсолютной сходимости* μ *ряда* (A) *удовлетворяют неравенствам*

$$0 \leqslant \mu - \lambda \leqslant \frac{1}{c}. \tag{3.8}$$

Заметим, что в случае $z_k = k$ имеем $c = 1$.

Доказательство. Пусть $\lambda < \infty$ и $x > \lambda$. Так как точка x лежит в полуплоскости сходимости ряда (3.2), то $\lim\limits_{k\to\infty} a_k b_k(x) = 0$ (см. (3.4)). Следовательно, последовательность $\{a_k b_k(x)\}$ ограничена:

$$|a_k b_k(x)| = |a_k| \exp \ln |b_k(x)| \leqslant M. \tag{3.9}$$

Из неравенства (3.5) и (3.9) следует

$$|a_k| \leqslant M \exp(1+\varepsilon_k) x S_k, \qquad \lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0. \tag{3.10}$$

Пусть $d > 0$ и $x_1 = x + d > \lambda + d$. Из (3.5) и (3.10) следует, что

$$|a_k b_k(x+d)| \leqslant M \exp[(1+\varepsilon_k) x S_k - (x+d)(1-\varepsilon_k) S_k] =$$
$$= M \exp\{-[d(1-\varepsilon_k) - 2\varepsilon_k x] S_k\}.$$

В силу условия (3.7) имеем

$$\frac{S_k}{\ln k} > c - \eta_k,$$

где $\lim\limits_{k\to\infty} \eta_k = 0$. Поэтому

$$|a_k b_k(x+d)| \leqslant M \frac{1}{k^{[d(1-\varepsilon_k) - 2x\varepsilon_k](c-\eta_k)}},$$

и ряд (3.2) будет сходиться абсолютно в точке $x_1 = x + d > \lambda + d$ при условии, что

$$[d(1-\varepsilon_k) - 2x\varepsilon_k](c - \eta_k) \geqslant \gamma > 1.$$

Так как $\varepsilon_k \to 0$ и $\eta_k \to 0$, то ряд (3.2) сходится в точке $x_1 = x + d > \lambda + d$, если $d > \frac{1}{c}$. Таким образом, имеют место неравенства (3.8).

4. Из неравенств (3.8) следует, что $\lambda = \mu$, если $c = \infty$. Вычислим в этом случае общее значение абсцисс сходимости λ и μ ряда (A).

Теорема 6. *Если*

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\ln n} = \infty, \tag{3.11}$$

то

$$\lambda = \mu = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln |a_n|}{Sn}.$$

Доказательство. Пусть

$$\gamma = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\ln |a_k|}{S_k}. \tag{3.12}$$

Тогда

$$|a_k| < \exp[(\gamma + \eta_k) S_k]$$

и (см. (3.4) и (3.5))

$$\left| \frac{1}{x} a_k b_k(x) \right| \leqslant \frac{1}{x} \exp[(\gamma + \eta_k) S_k - (1-\varepsilon_k) x S_k] =$$
$$= \frac{1}{x} \exp[-\delta_k S_k], \tag{3.13}$$

где

$$\delta_k = x - (\gamma + \nu_k), \quad \nu_k = \eta_k + \varepsilon_k x \quad \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{3.14}$$

Из (3.11) и (3.13) следует, что

$$S_k > A_k \ln k, \qquad A_k \to \infty, \tag{3.15}$$

и

$$\left| \frac{1}{x} a_k b_k(x) \right| < k^{-A_k \delta_k},$$

а из (3.14) и (3.15) следует, что $A_k \delta_k \to \infty$, если $x > \gamma$. Следовательно, ряд (3.2) сходится абсолютно, если $x > \gamma$.

Докажем, что ряд (3.2) расходится, если $x < \gamma$.

Из равенства (3.12) следует, что для некоторой подпоследовательности натуральных чисел $\{k_r\}$

$$|a_{k_r}| > \exp(\gamma - \varepsilon_r) S_{k_r}, \qquad \varepsilon_r \to 0.$$

Последнее неравенство и (3.5) показывают, что

$$\left| \frac{1}{x} a_{k_r} b_{k_r}(x) \right| \to \infty,$$

если $r \to \infty$ и $x < \gamma$.

5. Обратимся к вычислению абсцисс сходимости ряда (А) в общем случае, когда на расположение точек z_k помимо условий (3.1) не наложены какие-либо другие ограничения.

Теорема 7. *Абсцисса сходимости факториального ряда* (А) *определяется равенством*

$$\lambda = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\ln \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right|}{S_n}, \tag{3.16}$$

если $\lambda \geqslant 0$, *и равенством*

$$\lambda = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\ln \left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k \right|}{S_n}, \tag{3.17}$$

если $\lambda < 0$.

Замечание. Формулы (3.16) и (3.17) годны также для определения абсциссы сходимости, если имеет место условие (3.11). Но в этом случае можно пользоваться более простой формулой, приведенной в предыдущем пункте.

Доказательство. Рассмотрим случай $\lambda \geqslant 0$ и предположим, что ряд (3.2) сходится в точке $x > 0$.

Обозначим

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \tag{3.18}$$

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{x} \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{z_1}\right)\left(1 + \frac{x}{z_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{x}{z_k}\right)}, \tag{3.19}$$

$$b_k = \frac{1}{\alpha_k} = \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{z_1}\right)\left(1 + \frac{x}{z_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{x}{z_k}\right)}. \tag{3.20}$$

Воспользовавшись этими обозначениями, можем записать

$$\frac{a_k}{x}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{x}{z_1}\right)\left(1+\frac{x}{z_2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{z_k}\right)}=B_k-B_{k-1}$$

и

$$A_n=x\sum_{k=1}^{n}(B_k-B_{k-1})\,\alpha_k=x\sum_{k=1}^{n}B_k(\alpha_k-\alpha_{k-1})+xB_n\,\alpha_{n+1}.$$

Следовательно

$$|A_n|\leqslant|x|\sum_{k=1}^{n}|B_k|\,|\alpha_k-\alpha_{k+1}|+|B_n|\,|\alpha_{n+1}|\,|x|.$$

Заметим, что

$$\frac{|\alpha_{k+1}-\alpha_k|}{|\alpha_{k+1}|-|\alpha_k|}=-\frac{\frac{x}{|z_{k+1}|}}{1-\left|1+\frac{x}{z_{k+1}}\right|}=-\frac{x}{|z_{k+1}|-|x+z_{k+1}|}$$

и (см. (3.1))

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|\alpha_{k+1}-\alpha_k|}{|\alpha_{k+1}|-|\alpha_k|}=\lim_{k\to\infty}-\frac{x}{\sqrt{x_{k+1}^2+y_{k+1}^2}-\sqrt{(x+x_{k+1})^2+y_{k+1}^2}}=1.$$

Поэтому для достаточно больших k

$$1\leqslant\frac{|\alpha_{k+1}-\alpha_k|}{|\alpha_{k+1}|-|\alpha_k|}<C,\qquad C>1,$$

и

$$|A_n|\leqslant|x|\sum_{k=1}^{n}C|B_k|\,[|\alpha_{k+1}|-|\alpha_k|]+|x|\,|B_n|\,|\alpha_{n+1}|,\leqslant$$

$$\leqslant|x|CB\,[|\alpha_{n+1}|+|\alpha_1|+|\alpha_{n+1}|]\leqslant|x|C_1B|\alpha_{n+1}|,\qquad(3.21)$$

де $B\geqslant|B_n|$, $B>0$ (такое число B существует, ибо последовательность $\{B_n\}$ ходится).

Из неравенств (3.5) и (3.21) следует, что

$$|\alpha_{n+1}|\leqslant\exp xS_n(1+\varepsilon_n),\qquad\varepsilon_n\to0,$$

и

$$|A_n|\leqslant|x|C_1B\exp xS_n(1+\varepsilon_n),\qquad\varepsilon_n\to0.$$

Откуда для достаточно больших n

$$\frac{\ln|A_n|}{S_n}\leqslant x(1+\varepsilon_n),\qquad\varepsilon_n\to0.\qquad(3.22)$$

Итак, если факториальный ряд (3.2) сходится в точке x, то $x\geqslant\lambda$.

Докажем, что ряд (3.2) сходится в точке x, если $x>\lambda$.

Рассмотрим сумму

$$\left|\sum_{k=m}^{n}\frac{a_k}{x}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{x}{z_1}\right)\left(1+\frac{x}{z_2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{z_k}\right)}\right|=\left|\frac{1}{x}\sum_{k=m}^{n}(A_k-A_{k+1})\,b_k\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{|x|}\left|\sum_{k=m}^{n}A_k(b_k-b_{k+1})\right|+|A_nB_n|+|A_{m-1}b_m|.\qquad(3.23)$$

Из равенства (3.16) следует, что

$$|A_k|<\exp(\lambda+\varepsilon_k')\,S_k,\qquad\varepsilon_k'\to0,\qquad(3.24)$$

а из (3.5) и (3.24) следует, что

$$|A_n b_n| \leqslant \exp(\lambda + \varepsilon_n - x) S_n, \qquad \varepsilon_n \to 0.$$

Так как при $n > N$, $\lambda + \varepsilon_n - x \leqslant -\delta$, $\delta > 0$, то

$$\begin{gathered} |A_n b_n| \leqslant e^{-\delta S_n} \leqslant e^{-\frac{\delta}{2} S_{n+1}} \to 0, \\ |A_{m-1} b_m| < |A_{m-1} b_{m-1}| \to 0 \end{gathered} \tag{3.25}$$

при $m, n \to \infty$. Далее имеем

$$\begin{gathered} \left| \sum_{k=m}^{n} A_k (b_k - b_{k+1}) \right| = \left| \sum_{k=m}^{n} A_k b_{k+1} \cdot \frac{x}{|z_{k+1}|} \right| \leqslant \sum_{k=m}^{n} \left| A_k b_k \frac{x}{|z_{k+1}|} \right| \leqslant \\ \leqslant \sum_{k=m}^{n} \exp\left(-\frac{\delta}{2} S_{k+1}\right) \cdot \frac{x}{|z_{k+1}|} \leqslant x \int_{S_m}^{S_n} e^{-\frac{\delta}{2} t} \, dt. \end{gathered} \tag{3.26}$$

Из (3.3), (3.23), (3.25) и (3.26) получаем, что

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} \left| \sum_{k=m}^{n} \frac{a_k}{x} \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{z_1}\right)\left(1 + \frac{x}{z_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{x}{z_k}\right)} \right| = 0.$$

Таким образом, ряд (3.2) сходится, если $x > \lambda$.

Случай $\lambda < 0$ изучается аналогично.

Теорема 8. *Абсцисса абсолютной сходимости факториального ряда* (A) *определяется равенством*

$$\mu = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\ln \sum_{k=1}^{n} |a_k|}{S_n},$$

если $\mu \geqslant 0$, *и равенством*

$$\mu = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\ln \sum_{k=n}^{\infty} |a_k|}{S_n},$$

если $\mu < 0$.

Доказательство. Зафиксируем некоторое действительное значение x и рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{a_k}{\left(1 + \frac{x}{z_1}\right)\left(1 + \frac{x}{z_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{x}{z_k}\right)} \right|. \tag{3.27}$$

Ряд (3.27) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k| e^{i\delta_k}}{\left(1 + \frac{x}{z_1}\right)\left(1 + \frac{x}{z_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{x}{z_k}\right)},$$

где $\delta_k = \arg\left[\left(1 + \frac{x}{z_1}\right)\left(1 + \frac{x}{z_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{x}{z_k}\right)\right]$.

Если

$$x > \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\left|\sum\limits_{k=n}^{n} |a_k| e^{i\vartheta_k}\right|}{S_n},$$

то по предыдущей теореме ряд (3.27) сходится в точке x.

Приняв во внимание, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\left|\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k| e^{i\vartheta_k}\right|}{S_n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|}{S_n} = \mu, \qquad \mu \geqslant 0,$$

заключаем, что абсцисса абсолютной сходимости ряда (А) не больше μ.

Что абсцисса абсолютной сходимости не меньше этого же числа μ, можно доказать вполне аналогично, как соответствующую часть теоремы 7.

§ 4. Сопряженные факториальные ряды

Ряды вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k z_1 z_2 \cdots z_k}{z(z+z_1)(z+z_2)\cdots(z+z_k)}, \tag{4.1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{a_k (z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_k)}{z_1 z_2 \cdots z_k} \tag{4.2}$$

назовем *сопряженными* факториальными рядами.

Для случая $z_k = k$ известна теорема Ландау, утверждающая, что ряды (4.1) и (4.2) сходятся или расходятся одновременно. Эта теорема остается верной и в случае, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^2} < \infty. \tag{4.3}$$

Сказанное доказывается вполне аналогично как теорема Ландау [3].

Если же условие (4.3) не выполнено, но выполнены условия (3.1), то имеет место:

Лемма 6. *Пусть область G состоит из пары вертикальных углов*

$$-\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}, \qquad -\frac{\pi}{4} < \arg(-z) < \frac{\pi}{4},$$

а область H — из пары вертикальных углов

$$\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}, \qquad \frac{\pi}{4} < \arg(-z) < \frac{3\pi}{4}.$$

Если $z \in G$ и в точке z сходится ряд (4.1), то и ряд (4.2) сходится в этой точке.

Если $z \in H$ и в точке z сходится ряд (4.2), то и ряд (4.1) сходится в этой точке.

Доказательство. Обозначим

$$b_k = \frac{a_k z_1 z_2 \cdots z_k}{z(z+z_1)(z+z_2)\cdots(z+z_k)}, \tag{4.4}$$

$$c_k = \frac{(-1)^k z(z^2-z_1^2)(z^2-z_2^2)\cdots(z^2-z_k^2)}{z_1^2 z_2^2 \cdots z_k^2} = z\left(1-\frac{z^2}{z_1^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{z_2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{z_k^2}\right) \tag{4.5}$$

и представим ряд (4.2) в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k c_k. \tag{4.6}$$

Пусть $z \in G$. Из условий (3.1) следует, что для достаточно больших k

$$\left|1-\frac{z^2}{z_k^2}\right| < 1, \qquad z \in G.$$

Таким образом, последовательность $\{|c_k|\}$ будет убывающей и будет сходиться ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|c_k| - |c_{k+1}|). \tag{4.7}$$

Рассмотрим отношение

$$\frac{|c_k|-|c_{k+1}|}{|c_k - c_{k+1}|} = \frac{|z_{k+1}|^2 - |z_{k+1}^2 - z^2|}{|z|^2}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\lim_{k\to\infty} [|z_{k+1}|^2 - |z_{k+1}^2 - z^2|] = \operatorname{Re}(z^2).$$

Следовательно,

$$0 < \gamma \leqslant \frac{|c_k|-|c_{k+1}|}{|c_k-c_{k+1}|} \leqslant 1$$

и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k - c_{k+1}| \tag{4.8}$$

сходится, так как ряд (4.7) сходится.

Предположим, что ряд (4.1) сходится в точке $z \in G$, т. е. сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Тогда из сходимости ряда (4.8) (см. лемму 4) следует сходимость ряда (4.6), тождественного с рядом (4.2).

Вторая часть леммы доказывается вполне аналогично.

Замечание. Нетрудно проверить, что в лемме слово „сходится“ можно заменить словами „абсолютно сходится“.

Из леммы 6 и замечания непосредственно следует:

Теорема 9. *Если выполнены условия* (3.1), *то сопряженные факториальные ряды имеют одинаковые абсциссы сходимости и одинаковые абсциссы абсолютной сходимости.*

Эта теорема позволяет перенести результаты предыдущего параграфа на ряд Ньютона.

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступила в редакцию
19. III. 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. В. Бадалян. Сообщения Института Математики и Механики Академии Наук Арм. ССР. Выпуск 5, 13—84, (1950).
2. А. О. Гельфонд. Исчисление конечных разностей, Гостехиздат М.-Л., (1952).
3. L. M. Milne-Thomson. The calculus of finite differences, London (1953).

FAKTORIALINIŲ EILUČIŲ KONVERGENCIJA

M. GANDLER, E. GOLOSOVA ir A. NAFTALEVIČIUS

Reziumė

Darbe nagrinėjamos faktorialinės eilutės (A) ir (B). Įrodyta keleta teoremų apie tokių eilučių konvergenciją.

ÜBER DIE KONVERGENZ DER FAKULTÄTENREIHEN

M. GANDLER, E. GOLOSSOWA und A. NAFTALEWITSCH

(Zusammenfassung)

In der Arbeit werden die Fakultätenreihen (A) und (B) behandelt. Es werden einige Sätze über die Konvergenz, bzw. die absolute und gleichmässige Konvergenz solcher Reihen aufgestellt. Als Beispiel bringen wir folgenden Satz:

Es sind $Q(z_0)$ und $R(z_0)$ durch die Gleichungen

$$Q(z_0)=\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty} Q_n(z_0), \qquad Q_n(z_0): |z+z_n| > |z_0+z_n|,$$

$$R(z_0)=\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty} R_n(z_0), \qquad R_n(z_0): |z+z_n| \leqslant |z_0+z_n|,$$

definierte Mengen. Wenn die Reihe (A) im Punkte z_0 konvergiert (divergiert), so konvergiert (divergiert) sie in jedem inneren Punkte der Menge $Q(z_0)\left(R(z_0)\right)$.

In den letzten zwei Abschnitten werden die Reihen (A) und (B) behandelt, wenn die Zahlenfolge $\{z_n\}$ den Bedingungen (3.1) genügen. In diesem Falle werden die Abszissen der Konvergenz und der absoluten Konvergenz der Reihen (A) und (B) berechnet.
