I LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1—2
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1961

О НЕКОТОРЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТАХ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В. БЛИЗНИКАС

В заметке рассматриваются некоторые объекты, образованные из компонент фундаментальных дифференциально-геометрических объектов первого, второго и третьего порядков метрического пространства линейных элементов. Установлена зависимость между тензором неримановости ассоциированного финслерова пространства и тензором Дарбу ее индикатриссы. Для финслерова пространства с трехмерной базой эта зависимость, в несколько другом виде, была получена М. В. Васильевой [4]. При помощи пучка соприкасающихся гиперквадрик индикатриссы установлен геометрическй признак вырождения метрического пространства линейных элементов в финслерово.

Общая теория метрических пространств линейных элементов $\mathcal{F}_n$ инвариантным аналитическим методом Г. Ф. Лаптева [5] и А. М. Васильева [3] построена в работах [1] и [2].

§ 1. Аппарат исследования

На метрическое пространство линейных элементов $\mathcal{F}_n$ можно смотреть как на $\frac{n(n+1)}{2}$ — мерную поверхность в $\frac{n^2+5n-2}{2}$ — мерном пространстве $\mathfrak{H}^\circ(u^i, v^i, g_{ij})$ с фундаментальной группой — некоторым нормальным продолжением бесконечной аналитической группы точечных преобразований. При таком рассмотрении геометрия пространства $\mathcal{F}_n$ определяется как совокупность свойств поверхности

$$g_{ij}=g_{ij}(u, v) \quad (i, j, k=1, 2,\cdots, n)$$

пространства $\mathfrak{H}^\circ$, инвариантных относительно продолженной бесконечной группы аналитических преобразований:

$$\begin{gathered}
u^{i'}=u^{i'}(u^1,\cdots, u^n),\\
v^{i'}=\frac{\partial u^{i'}}{\partial u^l}v^i,\\
\bar{v}^i=\rho v^i\,(\rho>0),\\
g_{i'j'}=\frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}}g_{ij}.
\end{gathered} \tag{1}$$

Структурные уравнения третьего нормального продолжения бесконечной аналитической группы можно записать так:

$$
\begin{gathered}
D\omega^i = [\omega^j,\ \omega^i_j],\\
D\omega^i_j = [\omega^k_j,\ \omega^i_k] + [\omega^i_{jk},\ \omega^k],\\
D\omega^i_{jk} = [\omega^l_{jk},\ \omega^i_l] - [\omega^i_{jl},\ \omega^l_k] - [\omega^i_{lk},\ \omega^l_j] + [\omega^i_{jkl},\ \omega^l],\\
D\omega^i_{jkl} = [\omega^s_{jkl},\ \omega^i_s] - [\omega^i_{skl},\ \omega^s_j] - [\omega^i_{jsl},\ \omega^s_k] -\\
- [\omega^i_{jks},\ \omega^s_l] + [\omega^s_{(jk},\ \omega^i_{sl)}] + [\omega^i_{jkls},\ \omega^s],
\end{gathered} \tag{2}
$$

где формы ω^i_{jk}, ω^i_{jkl} и ω^i_{jkls} симметричны по всем нижним индексам, а циклирование происходит по парам нижних индексов.

Так как

$$D\omega^i \equiv 0, \quad D\omega^i_j \equiv [\omega^k_j,\ \omega^i_k] \quad (\mathrm{mod}\ \omega^i),$$

то с каждым центром $\boldsymbol{M}$ опорного линейного элемента, координаты которого являются первыми интегралами вполне интегрируемой системы $\omega^i = 0$, $\omega^\alpha_1 = 0$, связывается центроаффинное пространство $\boldsymbol{A}_n(\boldsymbol{M})$, отнесенное к такому аффинному реперу $\{\boldsymbol{M},\ \boldsymbol{e}_i\}$, что формы ω^i_k будут коэффициентами разложения репера, бесконечно близкого к исходному, из множества реперов с общей вершиной

$$d\boldsymbol{e}_i \equiv \omega^k_i\, \boldsymbol{e}_k\, (\mathrm{mod}\ \omega^i), \quad d\boldsymbol{M} = \omega^i \boldsymbol{e}_i.$$

Определяющая система дифференциальных уравнений пространства $\mathcal{F}_n$ имеет вид [2]:

$$dg_{ij} - g_{ik}\omega^k_j - g_{kj}\omega^k_i = g_{ij,k}\,\omega^k + g'_{ij,\alpha}\,\omega^\alpha_1 \quad (\alpha,\ \beta,\ \gamma = 2,\ 3, \cdots,\ n). \tag{3}$$

Проведя последовательно внешнее дифференцирование и развертывание по линейно независимым формам ω^i и ω^α_1, мы получим из (3) следующую совокупность систем уравнений Пфаффа:

$$
\begin{gathered}
\nabla g_{ij,k} + 2g_{l(i}\,\omega^l_{j)k} + g'_{ij,\alpha}\,\omega^\alpha_{1k} = g_{ij,kl}\,\omega^l + g'_{ij,k\alpha}\,\omega^\alpha_1,\\
\nabla g'_{ij,\alpha} + g'_{ij,\alpha}\,\omega^1_1 = g'_{ij,k\alpha}\,\omega^k + g''_{ij,\alpha\beta}\,\omega^\beta_1;\\
\nabla g_{ij,kl} + 4g_{m\left(i,\,|(k}\,\omega^m_{l)|\,j\right)} + g_{ij,m}\,\omega^m_{kl} - 2g_{m(i}\,\omega^m_{j)kl} +\\
+ 2g'_{ij,(l|\alpha|}\,\omega^\alpha_{k)1} + g'_{ij,\alpha}\,\omega^\alpha_{1kl} = g_{ij,klm}\,\omega^m + g'_{ij,kl\alpha}\,\omega^\alpha_1,\\
\nabla g'_{ij,k\alpha} + g'_{ij,k\alpha}\,\omega^1_1 + 2g'_{l(i,|\alpha|}\,\omega^l_{i)k} + g'_{ij,\beta}\,\omega^\beta_{\alpha k} -\\
- g'_{ij,\alpha}\,\omega^1_{1k} + g''_{ij,\beta\alpha}\,\omega^\beta_{1k} = g'_{ij,kl\alpha}\,\omega^l + g''_{ij,k\alpha\beta}\,\omega^\beta_1,\\
\nabla g''_{ij,\alpha\beta} + 2g''_{ij,\alpha\beta}\,\omega^1_1 + 2g'_{ij,(\alpha}\,\omega^1_{\beta)} = g''_{ij,k\alpha\beta}\,\omega^k + g'''_{ij,\alpha\beta\gamma}\,\omega^\gamma_1;\\
\nabla g_{ij,klm} + 6g_{p\left(i,\,|(kl}\,\omega^p_{m)|\,j\right)} + 3g_{ij,p(k}\,\omega^p_{lm)} - 4g_{p\left(i,\,|(k}\,\omega^p_{lm)|\,j\right)} -\\
- g_{ij,p}\,\omega^p_{klm} + 2g_{p(i}\,\omega^p_{j)klm} + g'_{ij,\alpha}\,\omega^\alpha_{1klm} - 2g'_{ij,(m|\alpha|}\,\omega^\alpha_{kl)1} +\\
+ 2g'_{ij,(kl|\alpha|}\,\omega^\alpha_{m)1} = g_{ij,klmr}\,\omega^n + g'_{ij,klm\alpha}\,\omega^\alpha_1,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
&\nabla g'_{ij,kl\alpha} + g'_{ij,kl\alpha}\omega_1^1 + 4g_{p\left(i,\middle|(k|\alpha|}\omega^p_{l)\middle|j\right)} + g'_{ij,p\alpha}\omega^p_{kl} + \\
&+ 2g'_{ij,(k|\beta|}\omega^\beta_{l)\alpha} - 2g'_{ij,(l|\alpha|}\omega^1_{k)1} - 2g'_{p(i,|\alpha|}\omega^p_{j)kl} - \\
&- g_{ij,\beta}\omega^\beta_{\alpha kl} + 2g''_{ij,(k|\beta\alpha|}\omega^\beta_{l)1} + 2g''_{l(i,|\alpha\beta|}\omega^l_{j)k} + \\
&+ 2g''_{ij,\gamma(\alpha}\omega^\gamma_{\beta)k} - 2g''_{ij,\alpha\beta}\omega^1_{1k} + 2g'_{ij,(\alpha}\omega^1_{\beta)k} + \\
&+ 2g'_{ij,k(\alpha}\omega^1_{\beta)} + g''_{ij,\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma_{1k} = g''_{ij,kl\alpha\beta}\omega^l + g'''_{ij,\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma_1, \qquad (4)\\
&\nabla g'''_{ij,\alpha\beta\gamma} + 3g'''_{ij,\alpha\beta\gamma}\omega^1_1 + 6g''_{ij,(\alpha\beta}\omega^1_{\gamma)} = g'''_{ij,k\alpha\beta\gamma}\omega^k + g^{\mathrm{IV}}_{ij,\alpha\beta\gamma\varepsilon}\omega^\varepsilon_1
\end{aligned}
$$

и т. д., где

$$
\begin{aligned}
\nabla g_{ij,i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q} &= dg_{ij,i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q} - \\
&- g_{kj,i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_q}\omega^k_i - \cdots - g_{ij,i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}\beta}\omega^\beta_{\alpha_q},
\end{aligned}
$$

а все коэффициенты, стоящие в правых частях этих уравнений, симметричные по всем греческим и по всем латинским индексам, стоящим после запятой, а также они симметричны и по индексам i и j. Фундаментальная последовательность тензоров фундаментально-геометрического объекта четвертого порядка пространства $\mathcal{F}_n$ имеет вид:

$$g'_{ij,\alpha}, \tag{5}$$

$$g'_{ij,\alpha},\quad g''_{ij,\alpha\beta}, \tag{6}$$

$$g'_{ij,\alpha},\quad g''_{ij,\alpha\beta},\quad g'''_{ij,\alpha\beta\gamma}, \tag{7}$$

$$g'_{ij,\alpha},\quad g''_{ij,\alpha\beta},\quad g'''_{ij,\alpha\beta\gamma},\quad g^{\mathrm{IV}}_{ij,\alpha\beta\gamma\varepsilon}. \tag{8}$$

§ 2. Геометрическая характеристика некоторых объектов пространства $\mathcal{F}_n$

1. *Вектор Картана.* Дифференциал дискриминанта тензора g_{ij} можно записать так:

$$dg = gg^{ij}\,dg_{ij}, \tag{9}$$

где

$$g = \det\|g_{ij}\|,\quad g^{ij} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g_{ij}}. \tag{10}$$

Внеся dg_{ij} из (3) в (9), мы получим

$$d\ln\sqrt{g} = \omega^1_1 + \cdots + \omega^n_n + g_i\omega^i + g'_\alpha\omega^\alpha_1, \tag{11}$$

где

$$g_i = \frac{1}{2}g^{jk}g_{jk,i},\quad g'_\alpha = \frac{1}{2}g^{ij}g'_{ij,\alpha}. \tag{12}$$

Дифференцирование второго соотношения (10) дает

$$\nabla g^{ij} = g^{ij}_{\cdot\cdot,k}\omega^k + g'^{ij}_{\cdot\cdot,\alpha}\omega^\alpha_1, \tag{13}$$

где

$$g^{ij}_{\cdot\cdot,k} = -g^{ip}g^{jq}g_{pq,k},\quad g'^{ij}_{\cdot\cdot,\alpha} = -g^{ip}g^{jq}g'_{pq,\alpha}. \tag{14}$$

Продолжение дифференциального уравнения (11) для величин g'_α приводит к уравнениям:

$$\nabla g'_\alpha + g'_\alpha\omega^1_1 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega^i,\ \omega^\alpha_1). \tag{15}$$

Положим

$$k^i = \sqrt{g_{11}}\, g^{ik} \delta_k^\alpha g'_\alpha, \tag{16}$$

где δ_k^α — символ Кронекера. Дифференцирование этих выражений дает

$$\nabla k^i \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, \omega^i,\ \omega_1^\alpha). \tag{17}$$

При помощи величин k^i можно определить инвариантный вектор — радиус-вектор инвариантной точки пространства $A_n(M)$:

$$\boldsymbol{k} = k^i \boldsymbol{e}_i,$$

который ортогонален к опорному линейному элементу. Этот вектор назовем вектором Картана пространства $\mathcal{F}_n$.

Если картановский вектор неопределен, т. е. $k^i = 0$, то дискриминант тензора g_{ij} (фундаментального метрического тензора пространства $\mathcal{F}_n$) не зависит от линейного элемента. Пространства $\mathcal{F}_n$, для которых $k^i = 0$ (или $g'_\alpha = 0$), дуальны некоторому метрическому пространству гиперплоских элементов в смысле Моора [7].

2. *Ассоциированное финслерово пространство* F_n. Определяющее уравнение ассоциированного финслерова пространства F_n [2] имеет вид:

$$dF - F\omega_1^1 = a_i \omega^i - h_\alpha \omega_1^\alpha, \tag{18}$$

где

$$F = \sqrt{g_{11}}, \quad a_i = \frac{1}{2F} g_{11,i}, \quad h_\alpha = -\frac{1}{F}\left(g_{1\alpha} + \frac{1}{2} g_{11,\alpha}\right). \tag{19}$$

Величины a_i и h_α образуют фундаментальный фуфференциально-геометрический объект первого порядка пространства F_n и подчиняются следующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} \nabla a_i - a_i \omega_1^1 - h_\alpha \omega_{1i}^\alpha + F\omega_{1i}^1 &= c_{ij}\omega^j + f_{i\alpha}\omega_1^\alpha, \\ -(\nabla h_\alpha + F\omega_\alpha^1) &= f_{i\alpha}\omega^i + h_{\alpha\beta}\omega_1^\beta, \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \frac{1}{2F}(g_{11,ij} - a_i a_j), \\ f_{i\alpha} &= \frac{1}{F}\left(g_{1\alpha,i} + \frac{1}{2} g'_{11,i\alpha} + a_i h_\alpha\right), \\ h_{\alpha\beta} &= \frac{1}{F}\left(g_{\alpha\beta} + g'_{1\alpha,\beta} + g'_{1\beta,\alpha} + \frac{1}{2} g''_{11,\alpha\beta} - h_\alpha h_\beta\right). \end{aligned} \tag{21}$$

Величины

$$b_\alpha = \frac{h_\alpha}{F}, \tag{22}$$

дифференциальные уравнения которых имеют вид

$$-(\nabla b_\alpha + b_\alpha \omega_1^1 + \omega_\alpha^1) \equiv 0\, (\mathrm{mod}\, \omega^i,\ \omega_1^\alpha),$$

определяют трансверсальную гиперплоскость пространства F_n [2]:

$$\boldsymbol{E}_\alpha = \boldsymbol{e}_\alpha + b_\alpha \boldsymbol{e}_1. \tag{23}$$

Величины

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{11} &= F^2, \\ \tilde{g}_{1\alpha} &= \tilde{g}_{\alpha 1} = g_{1\alpha} + \frac{1}{2} g'_{11,\alpha}, \\ \tilde{g}_{\alpha\beta} &= g_{\alpha\beta} + 2g'_{1(\alpha,\beta)} + \frac{1}{2} g''_{11,\alpha\beta} \end{aligned} \tag{24}$$

образуют тензор (метрический тензор пространства F_n), дифференциальные уравнения которого имеют вид:

$$
\begin{gathered}
d\tilde{g}_{11}-2\tilde{g}_{11}\omega_1^1=g_{11,i}\omega^i+2\tilde{g}_{1\alpha}\omega_1^\alpha,\\
\nabla\tilde{g}_{1\alpha}-\tilde{g}_{11}\omega_\alpha^1=\left(g_{1\alpha,k}+\frac{1}{2}g'_{11,k\alpha}\right)\omega^k+\tilde{g}_{\alpha\beta}\omega_1^\beta,\\
\nabla\tilde{g}_{\alpha\beta}-2\tilde{g}_{1(\alpha}\omega_{\beta)}^1=(\cdots)_k\omega^k+n_{\alpha\beta\gamma}\omega_1^\gamma,
\end{gathered}
\tag{25}
$$

где

$$
n_{\alpha\beta\gamma}=3g'_{(\alpha\beta,\gamma)}+3g''_{1(\alpha,\beta\gamma)}+\frac{1}{2}g'''_{11,\alpha\beta\gamma}. \tag{26}
$$

Тензор нефинслеровости пространства $\mathcal{F}_n$:

$$
n_\alpha=\frac{1}{2}g'_{11,\alpha},\quad n_{\alpha\beta}=2g'_{1(\alpha,\beta)}+\frac{1}{2}g''_{11,\alpha\beta} \tag{27}
$$

охватывает тензор n_α. В финслеровом пространстве F_n трансверсальная гиперплоскость совпадает с ортогональной гиперплоскостью. Гиперплоскость, ортогональная к опорному линейному элементу в смысле метрики пространства $\mathcal{F}_n$, совпадает с трансверсальной гиперплоскостью (23) пространства F_n тогда и только тогда, когда $n_\alpha=0$. Тензор n_α назовем тензором нетрансверсальности пространства F_n.

Тензор нериманововости n_α, $n_{\alpha\beta}$, $n_{\alpha\beta\gamma}$ пространства $\mathcal{F}_n$ [2] охватывает тензор нетрансверсальности n_α пространства F_n, тензор нефинслеровости n_α, $n_{\alpha\beta}$ пространтсва $\mathcal{F}_n$ и тензор нериманововости $n_{\alpha\beta\gamma}$ пространства $\mathcal{F}_n$.

3. *Индикатрисса пространства* F_n. Индикатрисса пространства F_n определяется при помощи дифференциального уравнения:

$$
dF-F\omega_1^1\equiv-h_\alpha\omega_1^\alpha\qquad(\operatorname{mod}\omega^i), \tag{28}
$$

последовательное продолжение которого дает

$$
\begin{gathered}
-(\nabla h_\alpha+F\omega_\alpha^1)\equiv h_{\alpha\beta}\omega_1^\beta,\\
\nabla h_{\alpha\beta}+h_{\alpha\beta}\omega_1^1\equiv h_{\alpha\beta\gamma}\omega_1^\gamma\qquad(\operatorname{mod}\omega^i),\\
\nabla h_{\alpha\beta\gamma}+2h_{\alpha\beta\gamma}\omega_1^1+2h_{(\alpha\beta}\omega_{\gamma)}^1\equiv h_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}\omega_1^\varepsilon,
\end{gathered}
\tag{29}
$$

где

$$
\begin{gathered}
h_{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{2}\left(2g'_{(\alpha\beta,\gamma)}+3g''_{1(\alpha\beta,\gamma)}+\frac{1}{2}g'''_{11,\alpha\beta\gamma}+3h_{(\alpha}h_{\beta\gamma)}\right),\\
h_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}=\frac{1}{F}\left(2g''_{(\alpha\beta,\gamma\varepsilon)}+3g'''_{1(\alpha,\beta\gamma\varepsilon)}+\frac{1}{2}g^{\mathrm{IV}}_{11,\alpha\beta\gamma\varepsilon}+3h_{(\alpha\beta}h_{\gamma\varepsilon)}+2h_{(\alpha}h_{\beta\gamma\varepsilon)}\right).
\end{gathered}
\tag{30}
$$

Величины h_α, $h_{\alpha\beta}$ и $h_{\alpha\beta\gamma}$ образуют фундаментальный дифференциально-геометрический объект третьего порядка индикатриссы пространства F_n. Метрический тензор и тензор нериманововости пространства F_n связаны с объектом $(h_\alpha,\ h_{\alpha\beta},\ h_{\alpha\beta\gamma})$ следующим образом:

$$
\tilde{g}_{1\alpha}=-Fh_\alpha,\quad \tilde{g}_{\alpha\beta}=Fh_{\alpha\beta}+h_\alpha h_\beta, \tag{31}
$$

$$
n_{\alpha\beta\gamma}=Fh_{\alpha\beta\gamma}-3h_{(\alpha\beta}h_{\gamma)}. \tag{32}
$$

Обозначив

$$
\tilde{g}=\det\|\tilde{g}_{ij}\|, \tag{33}
$$

$$
h=\det\|h_{\alpha\beta}\|, \tag{34}
$$

в силу (31), мы получим соотношение:

$$\tilde{g} = F^n h. \tag{35}$$

Мы будем рассматривать тот общий случай, когда метрика пространства F_n невырождена, т. е. $\tilde{g} \neq 0$. Вследствие этого предположения и соотношения (35), можем ввести тензоры $\tilde{g}^{ik}$ и $h^{\alpha\beta}$, компоненты которых являются приведенными минорами матриц $\|\tilde{g}_{ij}\|$ и $\|h_{\alpha\beta}\|$, т. е.

$$\tilde{g}^{ij} = \frac{1}{\tilde{g}} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \tilde{g}_{ij}}, \tag{36}$$

$$h^{\alpha\beta} = \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial h_{\alpha\beta}}. \tag{37}$$

Дифференцирование этих уравнений дает

$$\nabla \tilde{g}^{ij} \equiv 0, \quad \nabla h^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} \omega_1^1 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, \omega^i,\ \omega_1^\alpha).$$

Введем теперь величины

$$l_\alpha = \frac{1}{n+1} h^{\beta\gamma} h_{\beta\gamma\alpha}, \tag{38}$$

дифференциальные уравнения которых имеют вид

$$\nabla l_\alpha + l_\alpha \omega_1^1 + \omega_\alpha^1 \equiv l_{\alpha\beta} \omega_1^\beta \qquad (\mathrm{mod}\, \omega^i), \tag{39}$$

где

$$l_{\alpha\beta} = \frac{1}{n+1} h^{\varepsilon\gamma} (h_{\varepsilon\gamma\alpha\beta} - h^{\lambda\mu} h_{\lambda\gamma\alpha} h_{\varepsilon\mu\beta}).$$

При помощи величин l_α в $A_n(M)$ определяется инвариантная гиперплоскость

$$L_\alpha = e_\alpha + l_\alpha e_1. \tag{40}$$

Так как ковектор l_α называется чебышевским ковектором гиперповерхности (28), то ему соответствующую гиперплоскость (40) назовем чебышевской (характеристической) гиперплоскостью индикатриссы пространства F_n.

Тензор Дарбу индикатриссы пространства F_n имеет вид:

$$b_{\alpha\beta\gamma} = h_{\alpha\beta\gamma} - 3h_{(\alpha\beta} l_{\gamma)}. \tag{41}$$

Из уравнений (32) и (41) вытекает, что имеется зависимость между тензором нериманововсти пространства F_n и тензором Дарбу ее индикатриссы:

$$n_{\alpha\ \gamma} = F b_{\alpha\beta\gamma} + 3h_{(\alpha\beta} q_{\gamma)}, \tag{42}$$

где

$$q_\gamma = F l_\gamma - h_\gamma. \tag{43}$$

Для финслерова пространства с трехмерной базой эта зависимость, в несколько другом виде, была получена М. В. Васильевой [4].

Так как

$$dh = h h^{\alpha\beta} dh_{\alpha\beta},$$

то в силу уравнений (29) получим

$$d \ln \sqrt[n+1]{h} \equiv \frac{2}{n+1} \omega_\alpha^\alpha - \frac{n-1}{n+1} \omega_1^1 + l_\alpha \omega_1^\alpha \qquad (\mathrm{mod}\, \omega^i). \tag{44}$$

Соотношение (35) и уравнения (29) и (44) дают

$$d \ln \sqrt[n+1]{\tilde{g}} \equiv \frac{2}{n+1} \omega_i^i + q_\alpha \omega_1^\alpha \qquad (\mathrm{mod}\, \omega^i). \tag{45}$$

Очевидно, что величины q^i, определенные соотношениями

$$q^i = F\tilde{g}^{ik}\delta_k^\alpha q_\alpha, \tag{46}$$

являются координатами картановского вектора пространства F_n. Впервые этот вектор появился у Картана [6]. Если картановский вектор пространства F_n неопределен, т. е. $q^i=0$ (или $q_\alpha=0$), то индикатрисса пространства F_n является аффинной сферой, т. е. гиперповерхностью, все аффинные нормали которой проходят через одну точку.

Из (43) и (46) следует, что картановский вектор пространста F_n равен нулю тогда и только тогда, когда чебышевская гиперплоскость совпадает с трансверсальной. Следовательно, индикатрисса пространства F_n является аффинной сферой тогда и только тогда, когда ее чебышевская гиперплоскость совпадает с трансверсальной гиперплоскостью.

Если $b_{\alpha\beta\gamma}=0$, то индикатрисса является гиперквадрикой. Пространства F_n, для которых $b_{\alpha\beta\gamma}=0$, еще не являются римановыми. Если чебышевская гиперплоскость совпадает с трансверсальной и $b_{\alpha\beta\gamma}=0$, то, в силу (42) и (43), пространство F_n является римановым.

4. *Соприкасающиеся гиперквадрики.* Так как индикатрисса пространства F_n не проходит через центр пространства $\boldsymbol{A}_n(\boldsymbol{M})$, то поле соприкасающихся гиперквадрик относительно локального репера $\{\boldsymbol{M}, \boldsymbol{e}_i\}$ определяется уравнением:

$$a_{ij}x^ix^j + 2a_{0i}x^i + a_{00} = 0, \tag{47}$$

коэффициенты которого имеют вид:

$$\begin{gathered} a_{00} = -1, \quad a_{11} = F(F-2a_{01}), \\ a_{1\alpha} + h_\alpha a_{01} - F(h_\alpha + a_{0\alpha}), \\ a_{\alpha\beta} = 2h_{(\alpha}a_{\beta)0} - h_{\alpha\beta}a_{01} + (Fh_{\alpha\beta} + h_\alpha h_\beta), \end{gathered} \tag{48}$$

где a_{0i} — параметры пучка соприкасающихся гиперквадрик. В силу произвольности величин a_{0i}, центр такой гиперквадрики может занимать любое положение в пространстве $\boldsymbol{A}_n(\boldsymbol{M})$.

Требуя, чтобы центр соприкасающихся гиперквадрики совпал бы с центром пространства $\boldsymbol{A}_n(\boldsymbol{M})$, получим, что $a_{i0}=0$, а отсюда и из уравнений (47) и (48) вытекает, что искомая гиперквадрика имеет вид:

$$F^2(x^1)^2 + (Fh_{\alpha\beta} + h_\alpha h_\beta)x^\alpha x^\beta - 2Fh_\alpha x^1x^\alpha - 1 = 0. \tag{49}$$

Коэффициенты этой гиперквадрики, согласно (31), являются компонентами метрического тензора пространства F_n.

Требование, чтобы гиперквадрика (49) имела бы с индикатриссой касание третьего порядка в любом направлении, дает $n_{\alpha\beta\gamma}=0$. Отсюда и следует геометрический признак вырождения пространства F_n в риманово.

При помощи метрического тензора g_{ij} пространства $\mathcal{F}_n$ в каждом $\boldsymbol{A}_n(\boldsymbol{M})$ можно определить поле гиперквадрик $g_{ij}x^ix^j=1$. Если $n_\alpha=0$, $n_{\alpha\beta}=0$, то эти гиперквадрики совпадают с (49). Отсюда вытекает геометрический признак вырождения пространства $\mathcal{F}_n$ в финслерово, т. е. для того, чтобы пространство $\mathcal{F}_n$ было финслеровым, необходимо и достаточно, чтобы поле гиперквадрик $g_{ij}x^i x^j=1$ в $A_n(M)$ имело бы $(n-1)$—мерную огибающую.

Итак, картановский вектор пространства $\mathcal{F}_n$, величины b_α и тензор нетрансверсальности пространства $\mathcal{F}_n$ являются подобъектами объекта, образованного тензорами g_{ij} и (5); метрический тензор пространства F_n и тензор нефинслеровости пространства $\mathcal{F}_n$ — подобъекты объекта g_{ij} и (6); тензоры неримановости пространств F_n и $\mathcal{F}_n$ — подобъекты объекта (7); величины l_α, q^i и $b_{\alpha\beta\gamma}$ — подобъекты объекта g_{ij} и (7).

Вильнюсский государственный
педагогический институт

Поступила в редакцию
23. I. 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Близникас. К теории кривых метрического пространства линейных элементов, ДАН СССР, 1959, т. 127, № 1, 9—12.
2. В. И. Близникас. К дифференциальной геометрии метрических пространств линейных элементов, Учен. зап. Вильнюсского гос. пед. ин-та, 1960, т. 10, 11—20.
3. А. М. Васильев. Инвариантные аналитические методы в дифференциальной геометрии, ДАН СССР, 1951, т. 79, № 1, 5—7.
4. М. В. Васильева. Геометрическая характеристика некоторых инвариантов финслеровой геометрии, Труды третьего всесоюзн. Мат. съезда, 1956, т. 2, 139.
5. Г. Ф. Лаптев. Геометрия погруженных многообразий, Труды Московского мат. об-ва, 1953, т. 2, 275—382.
6. E. Cartan. Les espaces de Finsler, Paris, 1934.
7. A. Móor. Über Dualität von Finslerschen und Cartanschen Räumen, Acta Math. 1952, 88, 343—370.

APIE KAI KURIUOS METRINĖS TIESINIŲ ELEMENTŲ ERDVĖS GEOMETRINIUS OBJEKTUS

V. BLIZNIKAS

(Reziumė)

Darbe yra surasta geometrinė interpretacija kai kurių metrinės tiesinių elementų erdvės geometrinių objektų, kurių komponentės sudarytos iš metrinės tiesinių elementų erdvės pirmos, antros ir trečios eilės fundamentalių objektų komponenčių. Rastas ryšys tarp asocijuotos Finslerio erdvės nerymaniškumo tenzoriaus ir jos indikatrisės Darbu tenzoriaus. Jeigu asocijuotos Finslerio erdvės indikatrisės Čebyševo hiperplokštuma sutampa su transversaline hiperplokštuma ir Darbu tenzorius lygus nuliui, tai asocijuotoji Finslerio erdvė yra Rymano erdvė. Asocijuotos Finslerio erdvės indikatrisės glaudžiamųjų kvadrikų pluoštu nustatytas metrinės tiesinių elementų erdvės išsigimimo geometrinis požymis, t. y. surastos būtinos ir pakankamos sąlygos tam, kad metrinė tiesinių elementų erdvė būtų Finslerio erdvė.

ÜBER EINIGEN GEOMETRISCHEN OBJEKTEN DES METRISCHEN LINIENELEMENTRAUMES

V. BLIZNIKAS

(Zusammenfasung)

Die Koordinaten der Grundelementen von $(2n-1)$ dimensionaler Linienelementmanigfaltigkeit kann man als erste Integrale der totalintegrierbaren Differentialgleichungssystem $\omega^i=0$, $\omega_1^\alpha=0$ betrachten. Mit Hilfe des metrischen Grundtensors g_{ij} kann man in die Linienelementmanigfaltigkeit eine metrische Struktur einführen. Das fundamentale Differentialgleichungssystem des metrischen Linienelemententraumes $\mathcal{F}_n$ hat die Form (3).

In diesem Artikel werden einige geometrische Objekte untersucht, die aus Komponenten fundamentaler differentialgeometrischer Objekte erster, zweiter und dritter Ordnung des Raumes $\mathcal{F}_n$ gebildet sind.

Der Tensor $n_{\alpha\beta\gamma}$ charakterisiert die Abweichung des assozierten Finslerschen Raumes F_n von einen Riemannschen Raum. Darbouxscher Tensor $b_{\alpha\beta\gamma}$ der Indikatrix des Raumes F_n ist mit dem Tensor $n_{\alpha\beta\gamma}$ durch Identität (42) verbunden. In Bezug auf den Finslerschen Raum mit dreidimensionaler Grundmanigfaltigkeit ist diese Indentität in einer anderen Auffassung von M. W. Wasiljewa gefunden [4]. Wenn Tschebyscheffsche Hyperebene der Indikatrix, d. h. eine Hyperebene, die dem Tschebyscheffschen Kovektor der Indikatrix entspricht, mit der Transversalhyperebene zusammenfällt, und der Darbouxsche Tensor der Indikatrix gleich Null ist, so zusammenfällt der assozierte Finslersche Raum mit einem Riemannschen.

Mit Hilfe einer Schar der oskulierenden Hyperquadriken der Indikatrix ist ein geometrisches Merkmal der Ausartung des Raumes $\mathcal{F}_n$ in einen Finslerschen Raum festgestellt.